Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Développements :

Loi de réciprocité quadratique, Ellipsoïde de John-Loewner.

Bibliographie :

De Seguin Pazzis, Rombaldi, Gourdon, Grifone, Rouvière.

Rapport du jury :

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur R. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique simple. Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

Remarque 1. *Cadre : K un corps de caractéristique différente de 2 et E un K-ev de dimension finie.*

1 Formes quadratiques : liens avec l'algèbre linéaire et bilinéaire.

1.1 Formes bilinéaire et formes quadratiques

Définition 2 (Romb p463). *Forme bilinéaire, forme bilinéaire symétrique.*

Exemple 3 (Romb p463). $(x, y) \mapsto l_1(x)l_2(x)$ *est bilinéaire, de même avec la somme.*

Définition 4 (Romb p466). *Forme quadratique.*

Proposition 5 (Romb p466). *Q forme un K-ev.*

Proposition 6 (Romb p467). $q(\lambda x) = \lambda^2 x$.

Remarque 7 (Romb p466). *Pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Exemple.*

Proposition 8 (Romb p466). *Forme polaire.*

Proposition 9 (Romb p467). *Formules de polarisation.*

Proposition 10 (Romb p467). *Q est de dimension $n(n + 1)/2$.*

Exemple 11 (Seguin). *Exemple de forme quadratique.* $q_1(x, y) = 3x^2 + 6xy$

Exemple 12 (Seguin). $A \mapsto tr(A^2)$.

Exemple 13 (Seguin). *Le déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.*

1.2 Représentation matricielle

Définition 14 (Romb p467). *Matrice d'une forme quadratique.*

Proposition 15 (Romb p467). $q(x) = tXAX$.

Proposition 16. *Dans la base canonique,* $mat(q_1) = (3, 3, 3, 0)$.

Proposition 17 (Seguin p32). *Formule de changement de base.*

Remarque 18 (Seguin p32). *Les matrices représentant une même forme quadratique constituent une classe d'équivalence dans S_n.*

1.3 Rang et noyau

Définition 19 (Romb p468). *[Seguin p50] Noyau de q.*

Proposition 20 (Romb p468). *[Seguin p50]* $ker(q) = ker(b_d) = ker(b_g) = ker(A)$.

Proposition 21 (Romb p468). *[Seguin p50] Rang d'une forme quadratique.*

Exemple 22 (Seguin p51). *Exemple de calcul sur une forme quadratique.*

Définition 23 (Seguin p51). *Forme quadratique dégénérée, non dégénérée.*

Proposition 24 (Romb p469). *$q|F$ est non dégénérée si et seulement si $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.*

Exemple 25 (Seguin p51). $A \mapsto tr(A^2)$ *est non dégénérée.*

Proposition 26 (Seguin p51). *Théorème de Riesz lorsque q est non dégénérée.*

Application 27. *Gradient, produit vectoriel...*

Proposition 28 (Seguin). *Toute forme linéaire peut s'écrire $X \mapsto Tr(AX)$.*

1.4 Formes quadratiques positives et définies

Définition 29 (Gourdon p234)**.** *Forme quadratique positive.*

Proposition 30 (Gourdon p235)**.** *Inégalité de Cauchy Schwarz.*

Proposition 31 (Gourdon p235)**.** *Minkowski.*

Définition 32 (Gourdon p230)**.** *Forme quadratique définie.*

Proposition 33 (Gourdon p231)**.** *Définie implique non dégénérée.*

Proposition 34 (Gourdon p235)**.** *Une forme quadratique positive est non dégénérée si et seulement si elle est définie.*

Proposition 35 (Gourdon p235)**.** *Si q est positive alors $\sqrt{q}$ est une norme.*

Exemple 36. $A \mapsto Tr(tAA)$.

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Orthogonalité

Définition 37 (Romb p468)**.** *Orthogonal de X relativement à ϕ.*

Exemple 38. $ker(\phi) = E^{\perp}$, $\{0\}^{\perp} = E$.

Exemple 39 (Seguin p70)**.** *Orthogonal de S_n dans M_n pour la trace.*

Proposition 40 (Romb p468)**.** *$X^{\perp}$ est un sev de E, $X \subset (X^{\perp})^{\perp}$, si $X \subset Y$ alors $Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.*

Proposition 41 (Seguin p71)**.** *Dimension de l'orthogonal dans le cas d'une forme bilinéaire non dégénérée.*

Proposition 42 (Gourdon p233)**.** $dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E) + dim(F \cup Ker(q))$.
$F^{\perp\perp} = F + ker(q)$.

Contre exemple 43 (Grifone p303)**.** $q(x,y) = x^2 - y^2$, $F = (\vec{1,1}) = F^{\perp}$.

Proposition 44 (Romb p470)**.** *$dim(F) + dim(F^{\perp}) \geq dim(E)$, l'égalité étant réalisée si q est non dégénérée. L'égalité $E = F \oplus F^{\perp}$ est réalisée si et seulement si la restriction de q à F est non dégénérée.*

Exemple 45 (Romb p494)**.** $M_n = A_n \oplus S_n$.

2.2 Isotropie

Définition 46 (Romb p468)**.** *Vecteur isotrope.*

Remarque 47 (Seguin p52)**.** *Deux fq proportionnelles ont les mêmes vecteurs isotropes. Si x est un vecteur isotrope, l'ensemble des vecteurs de $\vec{x}$ sont isotropes. L'ensemble des vecteurs isotropes constitue donc un cône de sommet 0. D'où la définition suivante.*

Définition 48 (Seguin p52)**.** *[Romb p468] Cône isotrope.*

Exemple 49 (Gourdon p230)**.** *q est définie si $C_q = \{0\}$.*

Proposition 50 (Gourdon p230)**.** *Le noyau est inclus dans le cône. En particulier, si q est définie, elle est non dégénérée.*

Contre exemple 51 (Seguin p52)**.** $(0, 1, 1, 2)$ *a un cône non nul mais un noyau nul.*

Remarque 52 (Seguin p52)**.** *Le cône est stable par multiplication scalaire mais pas par addition.*

Définition 53 (Grifone p312)**.** *Sous-espace isotrope et condition d'existence d'espace isotrope.*

Proposition 54 (Grifone p312)**.** *Somme directe et espaces isotropes.*

Définition 55 (Grifone p321)**.** *Sous-espaces totalement isotropes.*

Proposition 56 (Grifone p321)**.** *Caractérisation de la totale isotropie.*

Exemple 57. *Pour $q((x,y,z)) = 2yz$, $F = \vec{(1,0,0),(0,1,0)}$ est totalement isotrope. $F_2 = (\vec{(0,1,1)})$ est anisotrope.*

Proposition 58 (Perrin p123)**.** *Indice de q. Si $dim(E) = n$, $\nu \leq n/2$.*

3 Classification des formes quadratiques

3.1 But

Remarque 59. *Seguin p40]*

Remarque 60. *Définition de morphisme d'espaces quadratiques, isomorphismes, équivalence de formes quadratiques.*
u est un isomorphisme si et seulement si pour toutes bases B et B_0 , les matrices de q dans B et de q_0 dans B_0 sont congruentes si et seulement si pour toute base B, si $B_0 = u(B)$, alors la matrice de q dans B égale la matrice de q_0 dans B_0.

Définition 61 (Romb p485)**.** *Deux formes quadratiques q_1, q_2 sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.*

Proposition 62 (Romb p486). *C'est une relation d'équivalence. q_1, q_2 sont équivalentes si et seulement si leurs matrices dans une base donnée sont congruentes.*

Définition 63 (Perrin). *[Seguin p53] Le discriminant de q est la classe de $det(A)$ dans $K^*/((K*)^2)$ si q est nondégénérée, et vaut 0 si q est dégénérée. Il ne dépend pas de la base choisie.*

Remarque 64. *$R^*/((R^*)^2$ s'identifie à $1, -1$. $C^*/((C^*)^2$ s'identifie à 1. $F_q^*/((F_q^*)^2$ s'identifie à $1, \epsilon$ où ϵ est un non-carré de F_q.*

Proposition 65. *Deux formes quadratiques équivalentes ont même rang, des noyaux de même dimension, et même discriminant. Mais cela n'est pas suffisant pour caractériser cette équivalence.*

Contre exemple 66. *$+, -(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ ont même rang et même discriminant, mais ne sont pas équivalentes.*

3.2 Réduction en forme diagonale

Définition 67 (Gourdon p231). *Bases q-orthogonales.*

Remarque 68 (Gourdon p231). *Dans une telle base, la matrice de q est diagonale.*

Exemple 69 (Seguin p88). *Pour la forme quadratique $q(x) = \sum a_i x_i^2$, la base canonique est orthogonale.*

Remarque 70 (Seguin p88). *Si on a une base orthogonale, c'est facile de trouver le rang de q et sa partie régulière*

Proposition 71 (Gourdon p231). *Existence de base q-orthogonale.*

Corollaire 72 (Seguin p231). *Toute forme quadratique est représentée par une matrice diagonale.*

Application 73 (Gourdon p231). *Avec A symétrique.*

Remarque 74. *Le théorème de pseudo-réduction simultanée (et son interprétation en termes de bases orthogonales). Si $K = \mathbb{R}$, si $q_1 \in Q(E)$ définie positive et $q_2 \in Q(E)$, il existe une base de E orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.*

Application 75. *log concavité du déterminant.*

Proposition 76. *John Loewner.*

Théorème 77 (Romb p471). *Réduction de Gauss.*

Remarque 78. *Cette décomposition s'obtient de façon effective, en éliminant des variables au fur et à mesure de la construction des l_i et en utilisant l'identité $xy = (1/4)((x + y)^2 - (x - y)^2)$.*

Exemple 79 (Romb p487). *Exemple avec une forme quadratique.*

3.3 Classification sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Proposition 80 (Seguin p100). *[H2G2] Matrice équivalente pour q de rang r.*

Corollaire 81 (Seguin p100). *Deux fq complexes sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Remarque 82. *En fait, c'est vrai pour les corps où tout élément admet une racine carrée, en particulier les corps algébriquement clos.*

Proposition 83 (Gourdon p324). *[Romb p479] Classification sur $\mathbb{R}$ et définition de la signature.*

Corollaire 84. *Deux fq réelles sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.*

Exemple 85 (Grifone p310). *Un exemple.*

Exemple 86. *Pour $n = 2$ et $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a > 0$, on a $det(A) = b^2 - 4ac$ et le signe de $b^2 - 4ac$ détermine la signature de a.*

Corollaire 87 (Grifone p310). *Caractérisation de q définie positive, q est non dégénérée.*

Application 88. *Il y a $n + 1$ classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^n$*

Remarque 89. *Pour l'étude de $O(q)$ on peut s'intéresser à $O(I_p q)$ car sont conjugués.*

Proposition 90. *Formes de Hankel.*

3.4 Classification sur les corps finis

Proposition 91. *Classification sur les corps finis.*

Corollaire 92 (Romb p485). *Deux fq non dégénérées sont équivalentes si et seulement si le rapport de leur déterminant est un carré dans F_q^*.*

Il y a $2n + 1$ classes d'équivalence, dont deux fq non dégénérées.

Application 93. *Loi de réciprocité quadratique.*

4 Le groupe orthogonal

Remarque 94. *Partie à enlever si manque de place...*

Définition 95. *On note $O(q)$ l'ensemble des $u \in GL(E)$ tel que $q \circ u = u$.*

Proposition 96. *$O(q)$ est le stabilisateur de A sous l'action par congruence.*

Proposition 97. *$O(q)$ est un groupe.*

Proposition 98 (Perrin p124)**.** *$u \in O(q)$ si et seulement si $tPAP = A$, où A est la matrice de q, et P celle de u.*

Proposition 99. *Si $f \in O(q)$ alors $f^* \in O(q)$.*

Exemple 100 (Grifone p316)**.** *Dans le cas euclidien, q est le produit scalaire et $f \in O(q)$ si et seulement si $f \circ f^* = id$ si et seulement si $tMM = I$.*

Définition 101. *$O(p, q)$.*

Proposition 102. *$O(p, q)$ isomorphe à $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$. Donc c'est compact lorsque p ou q vaut zéro.*

5 Applications

5.1 Géométrie différentielle

Définition 103 (Rouvière p293)**.** *Différentielle seconde.*

Proposition 104 (Rouvière p294)**.** *Forme bilinéaire de R^n de matrice...*

Théorème 105 (Rouvière p294)**.** *Théorème de Schwarz.*

Remarque 106. *On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.*

Remarque 107. *Cette forme quadratique apparait naturellement dans la formule de Taylor à l'ordre 2.*

Proposition 108 (Rouvière p371)**.** *CNS d'extremum.*

Proposition 109. *Lemme de Morse. En insistant sur le lien entre cône isotrope et les intersections de f avec son plan tangent*

Application 110. *Etude de la position d'un plan tangent par rapport à une surface.*

5.2 Classification des coniques

Définition 111 (Grifone p413)**.** *Une quadrique de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $q(x) + l(x) + c = 0$, où q est quadratique, l est linéaire, c est constante.*

Exemple 112. $3x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6 = 0$.

Remarque 113. *Etant donné une quadrique d'équation $q(x) + l(x) + c = 0$, la quadrique homogénéisée à cette équation est $Q(x, z) = q(x) + l(x)z + cz^2$, définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Remarque 114. *$C = C(Q) \cup z = 1$. Si $n = 2$, on parle de coniques. Selon $I(Q)$et $I(q)$, on peut classifier les coniques.*

Proposition 115. *Classification affine des coniques en fonction de Q et q. (Dans un grand tableau prenant la signature de Q, la forme de $C(q)$, et la conique résultant de cela).*